„Umgang mit Messunsicherheiten" oder „Fehlerrechnung"

Messunsicherheiten gehören zu jeder experimentellen Bestimmung einer Messgröße. Sie Stellen keine „Fehler" im Sinne eine unkorrekten Messung dar. Dennoch wird der Begriff „Fehlerrechnung" häufig benutzt, um die quantitative Bestimmung des Einflusses der Messunsicherheiten auf das Messergebnis zu beschreiben. Ziel ist es dabei aber in jedem Fall, ein quantitatives Maß für die Zuverlässigkeit der Messung abzuleiten.

Im Grundpraktikum sollen Sie ein Gespür für die realistische Einschätzung von Unsicherheiten und Fehlern erwerben. Überlegen Sie vor jeder Messung, welche Größen mit Unsicherheiten behaftet, und wie groß die entsprechenden Fehler sind (Streuung der Messwerte, Hinweise auf den Geräten oder sinnvolle Abschätzung). Ein Überschätzen der Genauigkeit der Messungen kann dazu führen, dass Ihr Ergebnis nicht innerhalb des Vertrauensbereiches mit Vergleichswerten (z. B. Literaturwert) übereinstimmt. Ein unterschätzen der Genauigkeit mindert den Wert der Messung auf den einer groben Schätzung. **Gehen Sie in jedem Fall im Diskussionsteil Ihres Protokolls auf die Messungenauigkeiten ein.**

Kategorisierung von Fehlern und Unsicherheiten:

- **Grobe Fehler** sind Abweichungen, die nicht mehr korrigierbar sind, wie Bedienungs- ober Ablesefehler.

- **Bekannte systematische Abweichungen** können korrigiert werden.

- **Statistische Fehler oder Typ-A-Unsicherheiten** treten immer durch Streuung der gemessenen Werte auf, also nur bei Messreihen. Für eine bessere Messung kann die Streuung kleiner werden, aber jede Messung ist und bleibt ungenau und der wahre Wert damit unbekannt. Die wichtigsten statistischen Größen sind:

Der **Mittelwert**	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Die **Standardabweichung** als Maß für die Streuung der Werte um den Mittelwert	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
Der **statistische Fehler** oder die **Standardabweichung des Mittelwerts**	$\Delta x_{Streu} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
Der **Vertrauensbereich**, in dem sich, bei Verwendung der einfachen Standardabweichung, der **„wahre" Wert x_w** mit einer Wahrscheinlichkeit P von etwa 68% befindet. Größere Vertrauensbereiche erhöhen diese Wahrscheinlichkeit (z.B. 2s: P=95%, 3s: P=99%).	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \le x_w \le \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}$

- **Unbekannte systematische Fehler oder Typ B-Unsicherheiten:** existieren auch schon bei Einzelmessungen und können nicht mit statistischen Methoden behandelt werden. Sind häufig durch die endliche Genauigkeit des Messinstruments oder mangelnde Kenntnis dieser bedingt. Sie liegen meistens bei mehreren durch Messungen bestimmten Größen vor. Ihr Einfluss auf das Ergebnis wird bei Vorliegen einer Ergebnisfunktion durch die **Gauß'sche Fehlerfortpflanzung** behandelt.

Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

Für die Unsicherheit *Δz* eines Ergebnisses *z* aus der Ergebnisfunktion *z=f(a, b, c, …) wobei a, b, c, …* gemessenen Größen mit den jeweiligen Unsicherheiten *Δa, Δb, Δc,...sind, gilt:*

$$\boxed{\Delta z \ = \ \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \ldots}}$$

wobei $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \ldots$ die **partiellen Ableitungen** sind. *Beispiel:*

$$f(x,y) = x^2 \sin(xy) \ , \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ = \ 2x\sin(xy) \ + \ x^2 y \cos(xy) \ , \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \ = \ x^3 \cos(xy)$$

häufig liegt einer der folgenden **Spezialfälle** vor, die sich einfacher behandeln lassen:

1. Ist die Ergebnisfunktion eine **Summe**, so addieren sich die quadrierten **absoluten** Fehler der gemessenen Größen, multipliziert mit den Quadraten ihrer konstanten Vorfaktoren, zum Quadrat des absoluten Gesamtfehlers. Beispiel:

$$\textbf{\textit{Summe}}: \ z \ = \ f(a,b) \ = \ Ka - b \ \rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial a} = K \ , \ \frac{\partial f}{\partial b} = -1 \ \rightarrow \ \Delta z = \sqrt{K^2 \Delta a^2 + (-1)^2 \Delta b^2}$$

2. Für **Produkte** von Potenzen addieren sich die quadratischen **relativen** Fehler, multipliziert mit den Quadraten der Exponenten, zum Quadrat des relativen Gesamtfehlers. Beispiel:

$$\textbf{\textit{Potenzprodukt}}: \ z \ = \ f(a,b) \ = \ Ka^m \, b^{-n}$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = Kma^{m-1} \, b^{-n} = m\frac{z}{a} \ , \ \frac{\partial z}{\partial b} = Ka^m \, (-n) b^{-n-1} = (-n)\frac{z}{b} \ \rightarrow \ \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{m^2 \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + (-n)^2 \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

Eine **vereinfachte Fehlerbetrachtung** kann in gegebenen Fällen über eine Betrachtung der Größtfehler erfolgen:

$$\textbf{\textit{Größtfehler}}: \ \Delta z \ \approx \ \left|\frac{\partial z}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial z}{\partial c}\right| \Delta c + \ldots$$

vereinfachte Spezialfälle:

$$\textbf{\textit{Summe}}: \ z \ = \ f(a,b) \ = \ Ka - b \ \rightarrow \ \Delta z \approx |K| \Delta a + \Delta b$$

$$\textbf{\textit{Potenzprodukt}}: \ z \ = \ f(a,b) \ = \ Ka^m \, b^{-n} \ \rightarrow \ \frac{\Delta z}{z} \approx m\frac{\Delta a}{a} + n\frac{\Delta b}{b}$$

Der Gesamtunsicherheit einer Messung

setzt sich im Allgemeinen aus statistischen und systematischen Fehlern zusammen, die entsprechend addiert werden müssen:

$$\Delta x_{Gesamt} \ = \ \sqrt{\Delta x_{Sys}^2 + \Delta x_{Streu}^2}$$

Angabe des endgültigen Messergebnisses

$$\boxed{x \ = \ \bar{x} \ \pm \Delta x \ \ und \ \ x \ = \ \bar{x} \ \pm \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%}$$

Die vollständige Angabe eines Ergebnisses erfolgt mit **absolutem** und **relativem** Fehler durch Angabe des im Bezug auf die Unsicherheit korrekt gerundeten ***Zahlenwertes*****,** der ***Unsicherheit*** mit der korrekten Anzahl gültiger Stellen und der ***Einheit***

Beispiel:

$$f = (165{,}3 \pm 0{,}7)\,\mathrm{mm} \quad ; \quad f = 165{,}3\,\mathrm{mm} \pm 0{,}4\,\%$$