# Umgang mit Messunsicherheiten

**Definition:** *Messunsicherheit ist ein mit dem Messergebnis assoziierter Parameter, der die Dispersion der Werte charakterisiert, die sinnvoll der zu messenden Größe zugeordnet werden können.*

Messunsicherheiten gehören zu jeder experimentellen Bestimmung einer Messgröße. Sie Stellen keine „Fehler“ im Sinne eine unkorrekten Messung dar, sondern dienen der Abschätzung der **Präzision** und **Genauigkeit** der Messung. Ziel ist es ein quantitatives Maß für die Zuverlässigkeit der Messung abzuleiten und in Form der Messunsicherheit anzugeben.

*Im Grundpraktikum sollen Sie ein Gespür für die realistische Einschätzung von Unsicherheiten und Fehlern erwerben. Überlegen Sie vor jeder Messung, welche Größen mit Unsicherheiten behaftet, und wie groß diese sind (Streuung der Messwerte, Hinweise auf den Geräten oder sinnvolle Abschätzung). Ein Überschätzen der Genauigkeit der Messungen kann dazu führen, dass Ihr Ergebnis nicht innerhalb des Vertrauensbereiches mit Vergleichswerten (z. B. Literaturwert) übereinstimmt. Ein unterschätzen der Genauigkeit mindert den Wert der Messung auf den einer groben Schätzung.* **Gehen Sie in jedem Fall im Diskussionsteil Ihres Protokolls auf die Messungenauigkeiten und Messfehler ein.**

## Kategorisierung von Unsicherheiten:

- **Messfehler** sind unterteilbar in **statistische** und **systematische** Messfehler.
- **Bekannte systematische Messfehler** können korrigiert werden, da sie Abweichungen in eine Richtung verursachen.
- **Statistische Messunsicherheiten oder Typ-A-Unsicherheiten** treten immer durch Streuung der gemessenen Werte auf, also nur bei Messreihen. Sie entstehen durch zufällige räumliche oder zeitliche Schwankungen in Einflussgrößen. Sie werden geringer bei größerer Anzahl an Wiederholungen, aber jede Messung ist und bleibt ungenau und der wahre Wert damit unbekannt. Die wichtigsten statistischen Größen sind:

| | |
|---|---|
| Der **Mittelwert** | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ |
| Die **Standardabweichung** $s$ als Maß für die Streuung der Werte um den Mittelwert | $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ |
| Die **Standardabweichung des Mittelwerts** | $\Delta x_{Streu} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ |
| Der **Vertrauensbereich**, in dem sich, bei Verwendung der einfachen Standardabweichung, der **„wahre“ Wert** $x_w$ mit einer Wahrscheinlichkeit $P$ von etwa 65 % befindet. Größere Vertrauensbereiche erhöhen diese Wahrscheinlichkeit ( z.B. 2s: $P = 95\,\%$, 3s: $99\,\%$). | $\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \leq x_w \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}$ |

- **Unbekannte systematische Messunsicherheiten oder Typ-B-Unsicherheiten:** existieren auch schon bei Einzelmessungen und können nicht mit statistischen Methoden behandelt werden. Sind häufig durch die endliche Genauigkeit des Messinstruments oder mangelnde Kenntnis dieser bedingt. Sie liegen meistens bei mehreren durch Messungen bestimmten Größen vor und werden mit einem Äquivalent der Standardabweichung (siehe Typ-A) abgeschätzt. Bei unkorrelierten Größen wird das Ergebnis bei Vorliegen einer Ergebnisfunktion durch die kombinierte Messunsicherheit nach Gauß abgeschätzt.

## Kombinierte Messunsicherheit nach Gauß (KMUG)

Die Unsicherheit $\Delta z$ eines Ergebnisses $z$ aus einer Ergebnisfunktion $z = f(a, b, c, \dots)$ hängt von den Messunsicherheiten der einzelnen unkorrelierten Messgrößen ($\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, ...) und von den **partiellen Ableitungen** ($\partial z/\partial a$, $\partial z/\partial b$, $\partial z/\partial c$, ...) ab.

$$\boxed{\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \Delta c^2 + \dots}}$$

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 \sin(xy) \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\sin(xy) + x^2 y \cos(xy) \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 \cos(xy)$$

häufig liegt einer der folgenden **Spezialfälle** vor, die sich einfacher behandeln lassen:

1. Ist die Ergebnisfunktion eine **Summe**, so addieren sich die quadrierten **absoluten** Messunsicherheiten der gemessenen Größen, multipliziert mit den Quadraten ihrer konstanten Vorfaktoren, zum Quadrat der absoluten Gesamtmessunsicherheit. Beispiel:

   $$\textbf{\textit{Summe:}}\ z = f(a,b) = Ka - b \ \rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial a} = K\ ,\ \frac{\partial z}{\partial b} = -1 \ \rightarrow\ \Delta z = \sqrt{K^2 \Delta a^2 + (-1)^2 \Delta b^2}$$

2. Für **Produkte** von Potenzen addieren sich die quadratischen **relativen** Messunsicherheiten, multipliziert mit den Quadraten der Exponenten, zum Quadrat der relativen Gesamtmessunsicherheit. Beispiel:

   $$\begin{aligned} &\textbf{\textit{Potenzprodukt:}}\ z = f(a,b) = K a^m b^{-n} \\ &\rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial a} = K m a^{m-1} b^{-n} = m\frac{z}{a}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial b} = K a^m (-n) b^{-n-1} = (-n)\frac{z}{b} \\ &\rightarrow\ \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{m^2 \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + (-n)^2 \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

## Die Gesamtunsicherheit einer Messung

setzt sich im Allgemeinen aus Messunsicherheiten von Typ-A (Streu) und Typ-B (Syst) zusammen, die entsprechend addiert werden müssen:

$$\Delta x_{Gesamt} = \sqrt{\Delta x_{Sys}^2 + \Delta x_{Streu}^2}$$

## Angabe des endgültigen Messergebnisses

$$\boxed{\Delta x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{und} \quad x = \bar{x} \pm \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%}$$

Die vollständige Angabe eines Ergebnisses erfolgt mit **absoluter** und **relativer** Messunsicherheit durch Angabe des im Bezug auf die Unsicherheit korrekt gerundeten **Zahlenwertes**, der **Unsicherheit** mit der korrekten Anzahl gültiger Stellen und der **Einheit**.
*Beispiel:*

| | | |
|---|---|---|
| | $f = (165{,}214 \pm 0{,}025)\,\mathrm{m}$ ; $f = 165{,}214\,\mathrm{m} \pm 0{,}016\,\%$ | |
| oder | $f = 165{,}214\,\mathrm{m}$ mit $s_c = 25\,\mathrm{mm}$ | |
| oder | $f = 165,214(25)$ m | (Messunsicherheit bezogen auf letzten Stellen des Messwerts) |